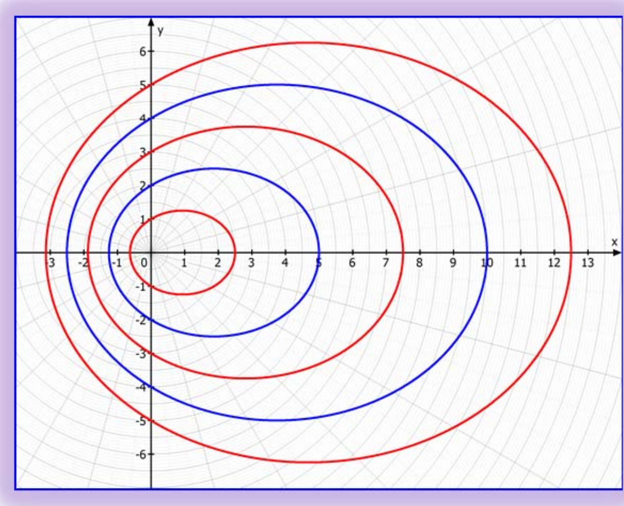


Ellipsen

Text Nr. 54060

Stand 22. Juli 2021

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Die Ellipse wurde in den Texten 23111 bis 22114 besprochen. Dort ging es vor allem um Tangenten, Konstruktionen usw.

Hier werden Ellipsen unter dem Gesichtspunkt der Differentialgeometrie untersucht.

Ganz ausführlich beschäftige ich mich mit der Darstellung durch Polarkoordinaten.

Für schräg liegende Ellipsen habe ich zwar ein Beispiel im Text, aber sie erhalten noch einen eigenen Text (54302)

Inhalt

1 Vorschau

Ellipsen kann man durch affine Abbildungen (z. B. Streckung oder Stauchung) aus einem Kreis erzeugen (siehe Text 23111), oder man definiert sie als Ortskurve von Punkten, die eine bestimmte Abstandsbedingung erfüllen (Seite 5).

Es gibt diese Gleichungsarten:

(1) **Koordinatengleichung, Mittelpunktsform** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ mit $M(0\,|\,0)$.

Liegt der Mittelpunkt in $M(x_M\,|\,y_M)$: $\frac{(x-x_M)^2}{a^2}+\frac{(y-y_M)^2}{b^2}=1$

(2) **Scheitelgleichung** $y^2=2px-(1-\varepsilon^2)x^2$

(3) **Parameterform** $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix} x_M+a\cdot\cos(t)\\ y_M+b\cdot\sin(t)\end{pmatrix}$ $t\in[0;2\pi[$

t ist der Winkel, den der Vektor $\vec{x}-\vec{x}_M=\begin{pmatrix} x-x_M\\ y-y_M\end{pmatrix}$ mit der x-Achse bildet.

(4) Mit **Polarkoordinaten** gibt es mehrere Gleichungsformen: *Übungsbeispiele ab Seite 12.*

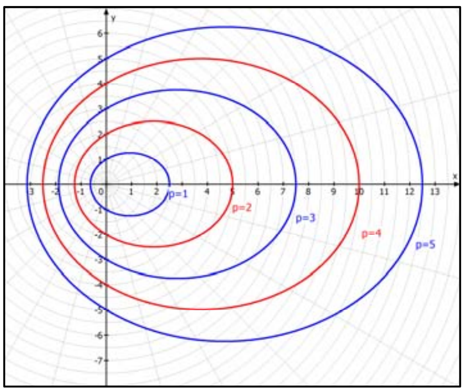
(4a) $r=\frac{p}{1-\varepsilon\cdot\cos(\varphi)}$ wobei für Ellipsen $0<\varepsilon<1$ gelten muss. (a>b) Siehe 3.4

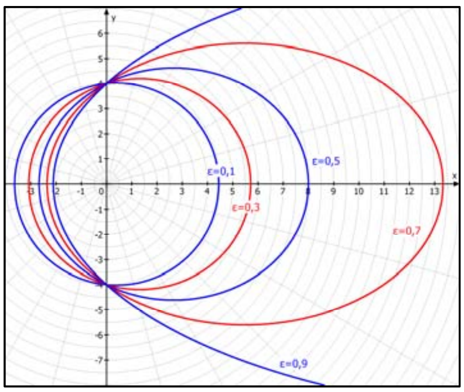
ε ist die <u>numerische Exzentrizität</u> der Ellipse: $\varepsilon=\frac{e}{a}$ und $p=\frac{b^2}{a}$

Die Bedeutung der Parameter p und ε studieren wir an Hand zweier Kurvenscharen:

$r(\varphi)=\frac{p}{1-0{,}6\cdot\cos(\varphi)}$ mit $p\in\{1,2,3,4,5\}$ und $\varepsilon=0{,}6$

$r(\varphi)=\frac{4}{1-\varepsilon\cdot\cos(\varphi)}$ mit $\varepsilon\in\{0{,}1;\,0{,}3;\,0{,}5;\,0{,}7;\,0{,}9\}$ und $p=4$





Bei dieser Gleichung liegt der Ursprung (= Pol des Polarkoordinatensystems) im <u>linken</u> *Brennpunkt* der Ellipse, die Polarachse geht längs der Ellipsenhauptachse nach rechts.

Linke Abbildung: Der <u>Parameter p bewirkt eine zentrische Streckung</u>, ändert also die Größe, aber nicht die Form.

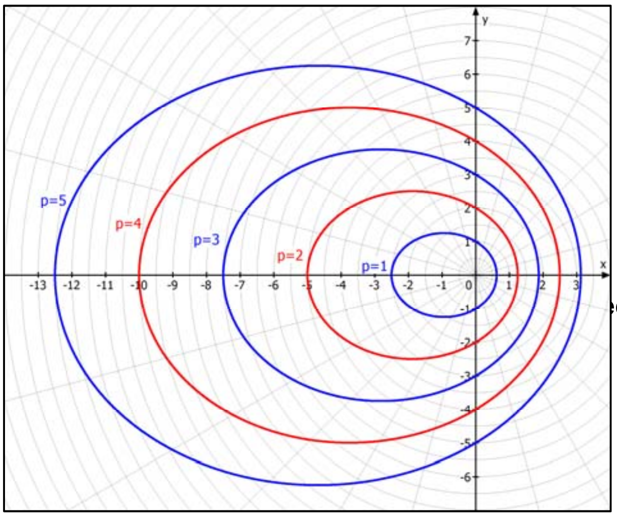
Rechte Abb.: Für $\varepsilon=1$ liegt ein Kreis vor, mit zunehmenden $\varepsilon\in]0;1[$ wird die Ellipse flacher.

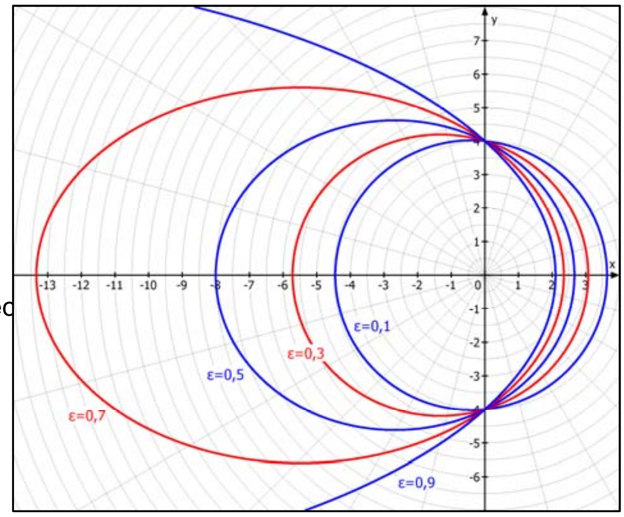
(4b) $r = \dfrac{p}{1+\varepsilon \cdot \cos(\varphi)}$ wobei $0 < \varepsilon < 1$ gelten muss. $\boxed{\text{Siehe 3.5}}$

Zwei Kurvenscharen dazu:

$r(\varphi) = \dfrac{p}{1+0{,}6 \cdot \cos(\varphi)}$ mit $p \in \{1,2,3,4,5\}$ und $\varepsilon = 0{,}6$

$r(\varphi) = \dfrac{4}{1+\varepsilon \cdot \cos(\varphi)}$ mit $\varepsilon \in \{0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}5;\ 0{,}7;\ 0{,}9\}$ mit p = 4.





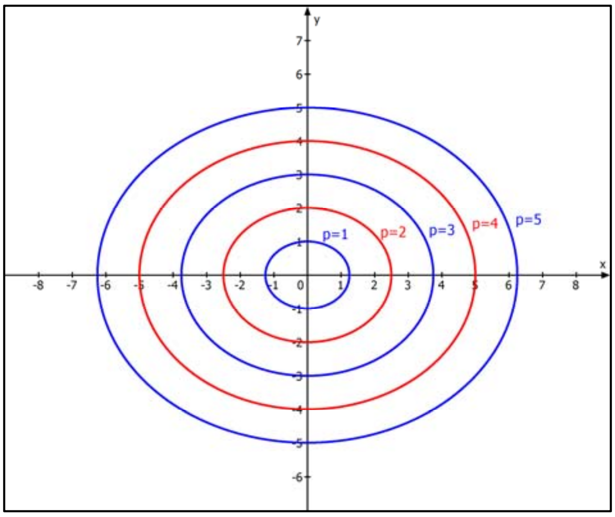
Hier liegt der Pol im rechten *Brennpunkt*.

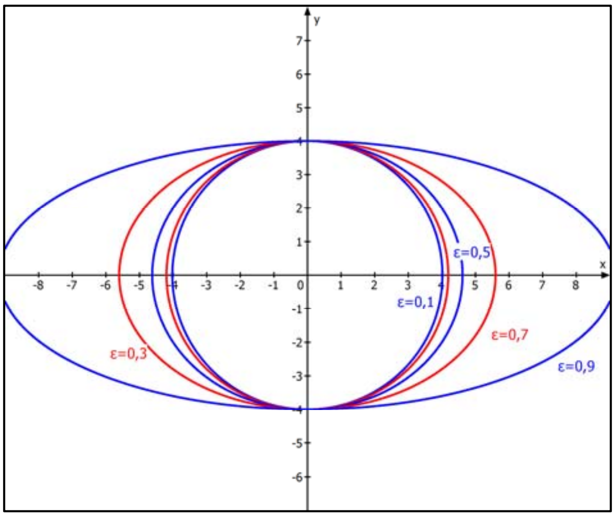
(4c) $r = \dfrac{b}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \cdot \cos^2(\varphi)}}$ Jetzt liegt der Pol im Mittelpunkt der Ellipse. $\boxed{\text{Siehe 3.3}}$

Zwei Kurvenscharen dazu:

$r(\varphi) = \dfrac{b}{\sqrt{1-0{,}36 \cdot \cos^2(\varphi)}}$ mit $b \in \{1,2,3,4,5\}$ und $\varepsilon = 0{,}6$

$r(\varphi) = \dfrac{4}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \cdot \cos^2(\varphi)}}$ mit $\varepsilon \in \{0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}5;\ 0{,}7;\ 0{,}9\}$ und b = 4





$r = \dfrac{a}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \cdot \sin^2(\varphi)}}$ ergibt eine Ellipse mit a < b (Siehe Seite 9/10).

Hier ist dann $e = \sqrt{b^2 - a^2}$ und $\varepsilon = \dfrac{a}{e}$.

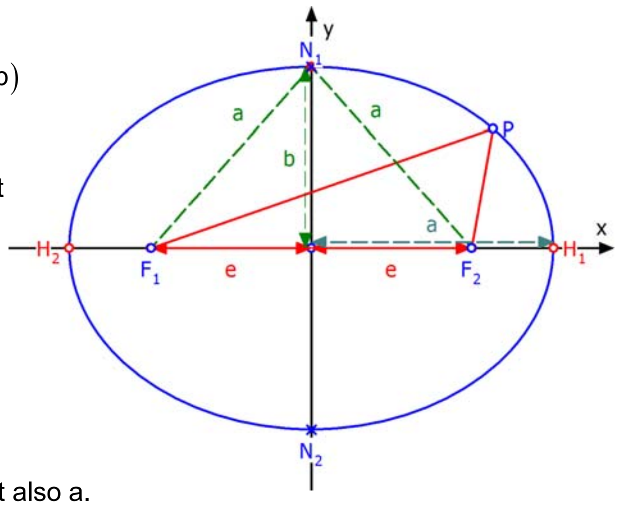
2. Definition einer Ellipse über eine Abstandssumme und Eigenschaften

Eine **Ellipse** ist die Menge der Punkte, für die die **Summe der Abstände von zwei bestimmten Punkten** („Brennpunkten“) konstant ist. (Es ist günstig, diese Summe mit 2a zu bezeichnen.)

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a \qquad (1)$$

Diese sogenannten ***Brennpunkte*** lege ich jetzt symmetrisch zum Ursprung auf die x-Achse:
$F_1(-e\,|\,0)$ und $F_2(e\,|\,0)$. e nennt man die **Brennweite** oder **lineare Exzentrizität.**

Die Abbildung zeigt die Brennpunkte F_1 und F_2, zwei Hauptscheitel H_1 und H_2, zwei Nebenscheitel $N_{1,2}(0\,|\,\pm b)$ und einen Ellipsenpunkt P.



Die Beziehung (1) soll ja für alle Punkte gelten, also gilt sie auch für den Hauptscheitel H_1. Dazu braucht man

$$\overline{F_1H_1} = e + x_H \quad \text{und} \quad \overline{F_2H_1} = x_H - e\,.$$

Die Summe dieser Abstände soll auch 2a sein:

$$\overline{F_1H_1} + \overline{F_2H_1} = e + x_H + x_H - e = 2x_H \overset{!!!}{=} 2a$$

Also folgt: $x_H = a$. Die große Halbachse der Ellipse ist also a.
Folgerung: Der rechte Hauptscheitel ist $H_1(a\,|\,0)$ und aus Symmetriegründen ist $H_2(-a\,|\,0)$.

Merke: Die Summe der Abstände eines Ellipsenpunktes von den beiden Brennpunkten ist doppelt so groß wie die große Halbachse a.

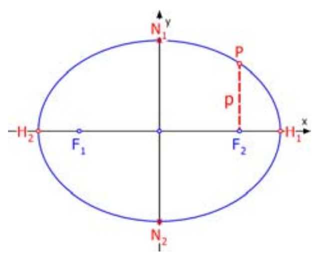
Wendet man dies auf die beiden Nebenscheitel $N_{1,2}(0\,|\,\pm b)$ an, dann folgt aus Symmetriegründen, dass beide Nebenscheitel von den Brennpunkten die Entfernung a haben.

Aus dem Dreieck OF_1N_1 folgt daher diese wichtige Beziehung: $e^2 + b^2 = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad e = \sqrt{a^2 - b^2}$

Weitere kennzeichnende Größen für der Ellipse:

Die y-Koordinate des Ellipsenpunktes senkrecht über dem Brennpunkt nennt man den **Parameter p.** Man kann p aus der Ellipsengleichung berechnen, indem man $P(e\,|\,p)$ einsetzt:

$$\frac{e^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{p^2}{b^2} = 1 - \frac{e^2}{a^2} = \frac{a^2 - e^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} \;\Rightarrow\; p^2 = \frac{b^4}{a^2} \;\Rightarrow\; \boxed{p = \frac{b^2}{a}}$$

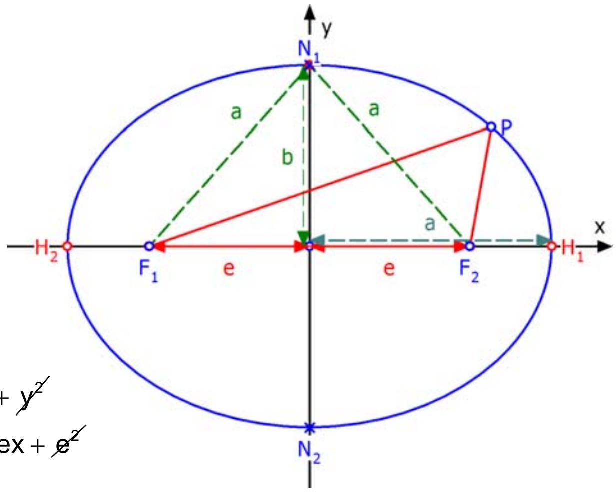


Als weitere wichtige Größe für die Ellipse definiert man die **numerische Exzentrizität** $\boxed{\varepsilon = \frac{e}{a}}$

3. Herleitung der Ellipsengleichungen

3.1 Koordinatengleichung

Unter einer Ellipse versteht man die Menge der Punkte, deren Abstandssumme zu zwei festen Punkten (sie heißen Brennpunkte) konstant 2a ist: $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ (1)



(1) bedeutet:

$$\sqrt{(x-e)^2+y^2}+\sqrt{(x+e)^2+y^2}=2a$$
$$\sqrt{(x-e)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+e)^2+y^2}$$

Quadrieren:

$$(x-e)^2+\cancel{y^2}=4a^2-4a\sqrt{(x+e)^2+y^2}+(x+e)^2+\cancel{y^2}$$
$$\cancel{x^2}-2ex+\cancel{e^2}=4a^2-4a\sqrt{(x+e)^2+y^2}+\cancel{x^2}+2ex+\cancel{e^2}$$
$$4a\sqrt{(x+e)^2+y^2}=4a^2+4ex \qquad |:4$$
$$a\sqrt{(x+e)^2+y^2}=a^2+ex$$

Quadrieren:

$$a^2\left[(x+e)^2+y^2\right]=\left(a^2+ex\right)^2$$
$$a^2\left[x^2+2ex+e^2+y^2\right]=a^4+2a^2ex+e^2x^2$$
$$a^2x^2+\cancel{2a^2ex}+a^2e^2+a^2y^2=a^4+\cancel{2a^2ex}+e^2x^2$$

Umordnen:

$$a^2x^2-e^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2e^2$$
$$x^2\left(a^2-e^2\right)+a^2y^2=a^2\left(a^2-e^2\right)$$

Hier wird jetzt vorausgesetzt, dass a > b ist, dann folgt $a^2-e^2=b^2$**:**

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \qquad |\ :a^2b^2$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

3.2 Bestätigung der Parametergleichung: $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}a\cdot\cos(t)\\ b\cdot\sin(t)\end{pmatrix}$

Man setzt in die linke Seite der Koordinatengleichung ein:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2\cdot\cos^2(t)}{a^2}+\frac{b^2\cdot\sin^2(t)}{b^2}=\cos^2(t)+\sin^2(t)=1$$

Damit ist gezeigt, dass die Parametergleichung eine Ellipse darstellt.

3.3 Herleitung der Polarkoordinatengleichungen (4c)

1. Fall: Die große Halbachse sei a (b < a), Dann gilt für die Brennweite $e = \sqrt{a^2 - b^2}$:
und die numerische Exzentrizität wird definiert als $\varepsilon = \frac{e}{a}$.

Aus der Ellipsengleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ und den Gleichungen $x = r \cdot \cos(\varphi)$, $y = r \cdot \sin(\varphi)$

folgt:
$$\frac{r^2 \cdot \cos^2(\varphi)}{a^2} + \frac{r^2 \cdot \sin^2(\varphi)}{b^2} = 1 \quad | \cdot a^2b^2$$
$$r^2\left(b^2\cos^2(\varphi) + a^2 \cdot \sin^2(\varphi)\right) = a^2b^2$$
$$r^2\left(b^2\cos^2(\varphi) + a^2 \cdot (1 - \cos^2(\varphi))\right) = a^2b^2$$
$$r^2\left(b^2\cos^2(\varphi) + a^2 - a^2 \cdot \cos^2(\varphi))\right) = a^2b^2$$
$$r^2\left(\cos^2(\varphi)(b^2 - a^2) + a^2\right) = a^2b^2$$

$a^2 = e^2 + b^2 \Rightarrow b^2 - a^2 = -e^2$
$$r^2\left(-e^2\cos^2(\varphi) + a^2\right) = a^2b^2 \quad | : a^2$$
$$r^2\left(-\frac{e^2}{a^2}\cos^2(\varphi) + 1\right) = b^2$$

Mit $\varepsilon = \frac{e}{a}$ folgt:
$$r^2\left(-\varepsilon^2\cos^2(\varphi) + 1\right) = b^2$$

Also erhält man
$$r^2 = \frac{b^2}{1 - \varepsilon^2 \cdot \cos^2(\varphi)}$$

Ergebnis:
$$r = \frac{b}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cdot \cos^2(\varphi)}} \qquad (4c)$$

Beispiele dazu:

(1) ***Berechne die Polarkoordinatengleichung zu*** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

$$9x^2 + 16y^2 = 144$$

$x = r \cdot \cos(\varphi)$, $y = r \cdot \sin(\varphi)$:
$$9r^2 \cdot \cos^2(\varphi) + 16r^2 \cdot \sin^2(\varphi) = 144$$
$$9r^2 \cdot \cos^2(\varphi) + 16r^2 \cdot \left(1 - \cos^2(\varphi)\right) = 144$$
$$16r^2 - 7r^2 \cdot \cos^2(\varphi) = 144$$
$$r^2 \cdot \left[16 - 7 \cdot \cos^2(\varphi)\right] = 144$$
$$r^2 = \frac{144}{16 - 7 \cdot \cos^2(\varphi)} \quad \text{bzw.} \quad r = \frac{12}{\sqrt{16 - 7 \cdot \cos^2(\varphi)}}$$

Verwendet man jedoch die Formel (4c) dazu, dann geht man so vor:

Aus a = 4 und b = 3 berechnet man $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$, $\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

Einsetzen in (4c):
$$r = \frac{b}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cdot \cos^2(\varphi)}} = \frac{3}{\sqrt{1 - \frac{7}{16} \cdot \cos^2(\varphi)}}$$

Jetzt mit 4 erweitern:
$$r = \frac{3 \cdot 4}{4 \cdot \sqrt{1 - \frac{7}{16} \cdot \cos^2(\varphi)}} = \frac{1}{\sqrt{16 - 7 \cdot \cos^2(\varphi)}}$$

Man erhält natürlich dasselbe Ergebnis in Polarkoordinaten.

(2) Die Umkehrung ist schwieriger:

Gegeben ist $r(\varphi)=\dfrac{12}{\sqrt{16-7\cdot\cos^2(\varphi)}}$. Bestimme Form und Lage der Kurve.

(a) **Wenn man die Formel kennt:** $r=\dfrac{b}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cdot\cos^2(\varphi)}}$, wird man zuerst im Radikanden den

Faktor 16 ausklammern: $r=\dfrac{12}{\sqrt{16\left(1-\frac{7}{16}\cdot\cos^2(\varphi)\right)}}=\dfrac{12}{4\sqrt{1-\frac{7}{16}\cdot\cos^2(\varphi)}}=\dfrac{3}{\sqrt{1-\frac{7}{16}\cdot\cos^2(\varphi)}}$.

Dann kann man zuerst aus $\varepsilon^2=\dfrac{7}{16}\Rightarrow\varepsilon=\dfrac{\sqrt{7}}{4}<1$ folgern, dass es sich um eine Ellipse handelt, weiter erkennt man b = 3, a = 4 und $e=\sqrt{7}$

(b) **Kennt man die Struktur der Formel nicht,** kann man sich so vortasten:

$\varphi=0$: $r(0)=\dfrac{12}{\sqrt{16-7}}=\dfrac{12}{3}=4$ $x(0)=r(0)\cdot\cos(0)=4\cdot1=4$,

$y(0)=r(0)\cdot\sin(0)=4\cdot0=0$

Kurvenpunkt: $A(4\,|\,0)$.

$\varphi=90^\circ$: $r(90)=\dfrac{12}{\sqrt{16-7\cdot0}}=\dfrac{12}{4}=3$ $x(90)=r(90)\cdot\cos(90)=3\cdot0=0$,

$y(90)=r(90)\cdot\sin(90)=3\cdot1=3$

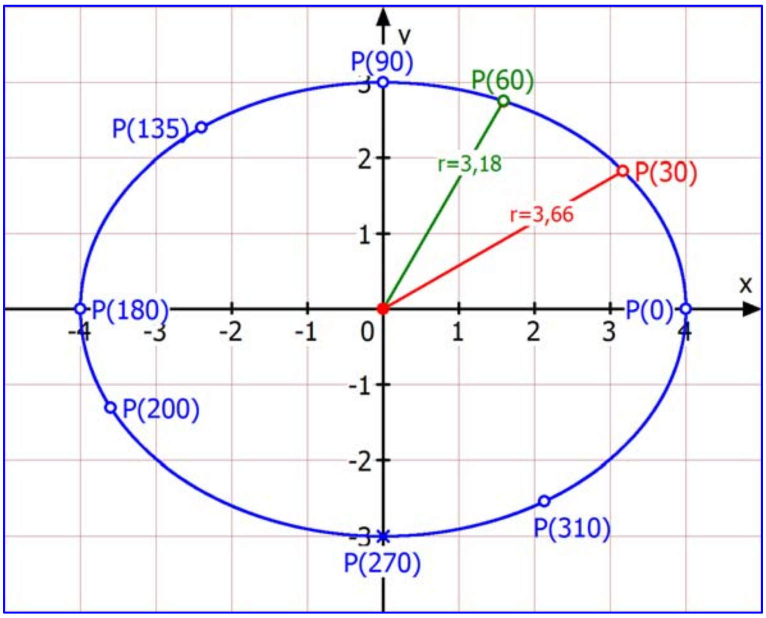
Kurvenpunkt: $B(0\,|\,3)$.

Es gibt einen **minimalen r-Wert**: Für $\cos(\varphi)=0\Leftrightarrow\varphi=90^\circ$ oder 270^0 wird der Nenner (Radikand) maximal, also der Bruch minimal: $r_{min}=\dfrac{12}{\sqrt{16}}=3$

Und es gibt einen **maximalen Radiuswert**: Der Nenner (Radikand) wird maximal, wenn $\cos^2(\varphi)=1$ wird, also für $\cos(\varphi)=\pm1\Leftrightarrow\varphi=0^\circ$ oder 180°: $r_{max}=r(0)=\dfrac{12}{\sqrt{16-7}}=\dfrac{12}{3}=4$

Diese Eigenschaft passt nur zu einer Ellipse. Hyperbel und Parabel scheiden aus.

Die Abbildung zeigt diese Ellipse zusammen mit einigen Punkten.
In Klammern steht der Winkel φ gegen die positive x-Achse im Gradmaß.
Bei zwei Punkten habe ich auch den Radius angefügt.
Der größte r-Wert ist a = 4 für P(0) und P(180), der kleinste ist b = 3 für P(90)und P(270).

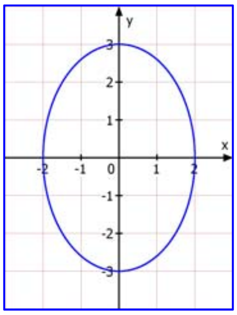


Hinweis: Im Text 54302 wird das **Thema „Fernpunkte“** behandelt. Dabei geht es im Grunde um genau dieses Thema: Was passiert bei Kurven 2. Ordnung, wenn $r \to \infty$ geht? Bei Ellipsen ist dies nicht möglich, wie man hier sieht, bei Parabeln ist dies in Achsenrichtung möglich, bei Hyperbeln in den zwei Asymptotenrichtungen. Auf diese Weise kann man den Typ erkennen.

(3) Welche Kurve wird durch $r(\varphi) = \frac{3}{\sqrt{1+1{,}25\cdot\cos^2(\varphi)}}$ dargestellt?

Dese Gleichung passt nicht zu $r = \frac{b}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cdot\cos^2(\varphi)}}$ sondern hat diese Form $r = \frac{b}{\sqrt{1+\varepsilon^2\cdot\cos^2(\varphi)}}$

Wir wollen herausfinden, was die Gleichung darstellt. Um das Ziel optisch zu erkennen, lasse ich die Kurve durch MatheGrafix darstellen:



Ich suche zuerst nach dem minimalen und dem maximalen Radius:

<u>r wird minimal</u>, wenn der Radikand maximal wird. Den größten Wert erhält der Radikand, wenn $\cos(\varphi) = \pm 1$, also für $\varphi = 0^\circ$ oder $\varphi = 180^\circ$.

$r(0) = \frac{3}{\sqrt{1+1{,}25}} = \frac{3}{\sqrt{2{,}25}} = \frac{3}{1{,}5} = 2$ $\quad x(0) = r(0)\cdot\cos(0) = 2\cdot 1 = 2$

$y(0) = r(0)\cdot\sin(0) = 2\cdot 0 = 0:$ $\quad P(0) = (2\,|\,0)$.

<u>r wird maximal</u>, wenn der Radikand minimal wird. Den kleinsten Wert erhält der Radikand, wenn $\cos(\varphi) = 0$, also für $\varphi = 90^\circ$ oder $\varphi = 270^\circ$.

$r(90) = \frac{3}{\sqrt{1+0}} = 3$ $\quad x(90) = r(90)\cdot\cos(90) = 0$

$y(90) = r(90)\cdot\sin(90) = 3\cdot 1 = 3:$ $\quad P(90) = (0\,|\,3)$.

Damit erkennt man, dass eine in x-Richtung gestauchte Ellipse vorliegt: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

Dann muss einem auffallen, dass in der Gleichung offenbar $\varepsilon = 1{,}25$ ist, was nicht zur Aussage passt, dass für Ellipsen gilt: $0 < \varepsilon < 1$. Die Definition heißt: $\varepsilon = \frac{e}{\text{große Halbachse}}$

Für eine in x-Richtung gestauchte Ellipse gilt jedoch: $b^2 = e^2 + a^2 \quad \Leftrightarrow \quad e^2 = b^2 - a^2$!

Daher gilt dann $\varepsilon = \frac{e}{b} = \frac{3}{2}$, weil eben b die große Halbachse ist. Die gegebene Gleichung

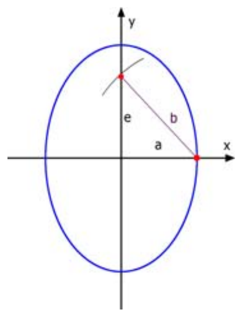
hat also NICHT diese Form: $r = \frac{b}{\sqrt{1+\varepsilon^2\cdot\cos^2(\varphi)}}$, obwohl sie so aussieht.

Herleitung der richtigen Formel:

Aus $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ und den Gleichungen $x = r\cdot\cos(\varphi)$, $y = r\cdot\sin(\varphi)$

folgt:

$$r^2\left(b^2\cos^2(\varphi) + a^2\cdot\sin^2(\varphi)\right) = a^2b^2$$
$$r^2\left(b^2\left(1-\sin^2(\varphi)\right) + a^2\cdot\sin^2(\varphi)\right) = a^2b^2$$
$$r^2\left(b^2 - b^2\cdot\sin^2(\varphi) + a^2\cdot\sin^2(\varphi)\right) = a^2b^2$$
$$r^2\left(b^2 + (a^2 - b^2)\cdot\sin^2(\varphi)\right) = a^2b^2$$
$$r^2\left(b^2 - e^2\sin^2(\varphi)\right) = a^2b^2 \quad | :b^2$$



$$r^2\left(1-\frac{e^2}{b^2}\sin^2(\varphi)\right)=a^2 \quad\Leftrightarrow\quad r^2\left(1-\varepsilon^2\sin^2(\varphi)\right)=a^2 \quad\Leftrightarrow$$

$$r=\frac{a}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cdot\sin^2(\varphi)}}$$

Wir haben nun plötzlich eine völlig andere Formel erhalten.

Es gibt also diese beiden Formeln für Ursprungsellipsen in Polarkoordinaten:

Wenn a > b:	$r=\frac{b}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cdot\cos^2(\varphi)}}$	mit $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$
Wenn b > a	$r=\frac{a}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cdot\sin^2(\varphi)}}$	mit $\varepsilon=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$

Anwendung:

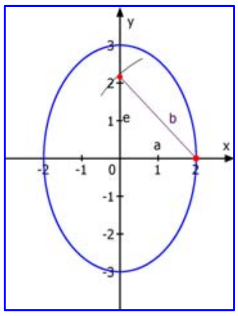
Bestimme die Polarkoordinatengleichung für $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ bzw. $9x^2+4y^2=36$

Kurzlösung:

$$a=2,\ b=3 \quad\Rightarrow\quad e=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5} \quad\Rightarrow\quad \varepsilon=\frac{e}{b}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

r(φ)=2/sqrt(1-5/9*sin(φ)^2)

Also lautet die Gleichung: $$r(\varphi)=\frac{2}{\sqrt{1-\frac{5}{9}\cdot\sin^2(\varphi)}} \qquad (*)$$



Oder man geht wie bei der Herleitung vor:

Oder Ausführliche Lösung:

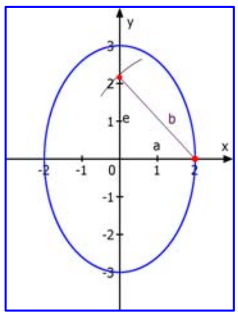
$x=r\cdot\cos(\varphi),\ y=r\cdot\sin(\varphi)$ einsetzen: $9\cdot r^2\cos^2(\varphi)+4\cdot r^2\sin^2(\varphi)=36$

$\cos^2(\varphi)=1-\sin^2(\varphi)$ ersetzen: $9\cdot r^2\left(1-\sin^2(\varphi)\right)+4\cdot r^2\sin^2(\varphi)=36$

$$r^2\cdot\left(9-5\cdot\sin^2(\varphi)\right)=36$$

r(φ) = 6/sqrt(4+5*cos(φ)^2)

Hieraus folgt dann $$r=\frac{6}{\sqrt{9-5\cdot\sin^2(\varphi)}}$$



Kürzt man durch 3, entsteht daraus (*), was aber unnötig ist.

Es ist natürlich nicht falsch, wenn man $\sin^2(\varphi)=1-\cos^2(\varphi)$ ersetzt:

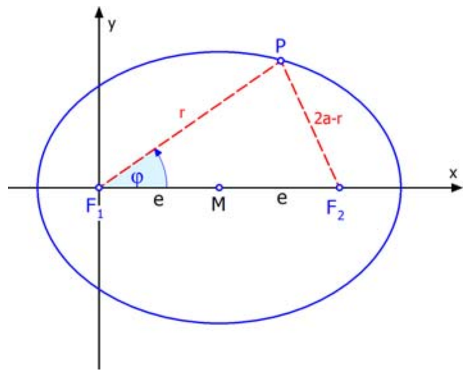
$$9\cdot r^2\cos^2(\varphi)+4\cdot r^2\left(1-\cos^2(\varphi)\right)=36$$

$$r^2\left(5\cdot\cos^2(\varphi)+4\right)=36 \quad\Rightarrow\quad r=\frac{6}{\sqrt{4+5\cdot\cos^2(\varphi)}}.$$

3.4 Herleitung der Polarkoordinatengleichung (4a) $r = \frac{p}{1-\varepsilon\cdot\cos(\varphi)}$

Die Ellipse wird nun so in x-Richtung verschoben, dass ihr linker Brennpunkt in den Ursprung fällt.

Die Strecke PF_2 hat dann die Länge $2a - r$. Das liegt daran, dass für die Summe der Abstände $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ gilt.



Im Dreieck F_1F_2P wird der Kosinussatz angewandt:

$$\overline{F_2P}^2 = \overline{F_1F_2}^2 + \overline{F_1P}^2 - 2\cdot\overline{F_1F_2}\cdot\overline{F_1P}\cdot\cos(\varphi)$$
$$(2a-r)^2 = (2e)^2 + r^2 - 2\cdot 2e\cdot r\cdot\cos(\varphi)$$
$$4a^2 - 4ar + r^2 = 4e^2 + r^2 - 4er\cdot\cos(\varphi) \qquad |\ -r^2$$
$$4a^2 - 4e^2 = 4ar - 4er\cdot\cos(\varphi) \qquad |\ :4$$
$$a^2 - e^2 = ar - er\cdot\cos(\varphi) \qquad |\ \ a^2 - e^2 = b^2$$
$$b^2 = r\cdot(a - e\cdot\cos(\varphi))$$
$$r = \frac{b^2}{a - e\cdot\cos(\varphi)}$$

Kürzt man diesen Bruch durch a: $r = \dfrac{\frac{b^2}{a}}{1-\frac{e}{a}\cdot\cos(\varphi)}$ und ersetzt: $p = \dfrac{b^2}{a}$ und $\varepsilon = \dfrac{e}{a}$:

dann erhält man: $r = \dfrac{p}{1-\varepsilon\cdot\cos(\varphi)}$ (4a)

Beispiele

a) Eine Ellipse hat a = 4, b = 3. Ihr linker Brennpunkt sei $F_2(0|0)$. Stelle ihre Gleichungen auf.

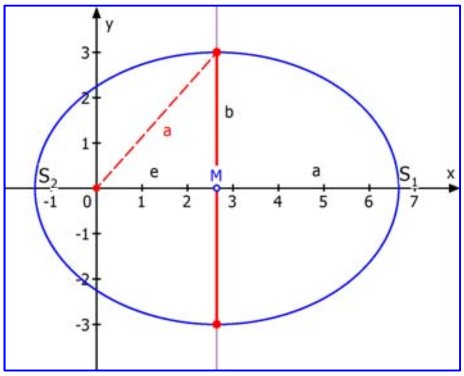
Zuerst berechnet man $e = \sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{7}$, $\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ und $p = \frac{b^2}{a} = \frac{9}{4}$.

Da der Abstand des Mittelpunkts von den Brennpunkten gleich e ist, folgt: $M\left(\sqrt{7}\,|\,0\right)$,

Damit hat man die Hauptachsengleichung:

$$\frac{\left(x-\sqrt{7}\right)^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Die Scheitel der Ellipse findet man so:



$$x_{S,1} = x_M + a = \sqrt{7}+4 \approx 6{,}65 \qquad S_1\left(\sqrt{7}+4\,|\,0\right)$$
$$x_{S,2} = x_M - a = \sqrt{7}-4 \approx -1{,}35 \qquad S_2\left(\sqrt{7}-4\,|\,0\right)$$

Für die Polarkoordinatengleichung (4a) folgt dann

$$r = \frac{\frac{9}{4}}{1-\frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\cos(\varphi)} \quad \text{bzw.} \quad r = \frac{9}{4-\sqrt{7}\cdot\cos(\varphi)}$$

b) Gegeben ist die Gleichung $r(\varphi)=\dfrac{3,2}{1-0,6\cdot\cos(\varphi)}$ Bestimme die Ellipse.

Es gibt einen maximalen und einen minimalen Radius.

r wird maximal, wenn der Nenner minimal wird, also wenn $\cos(\varphi)$ maximal wird,

also für $\cos(\varphi)=1 \Leftrightarrow \varphi=0^{O}$: $r_{min}=r(0^{O})=\dfrac{3,2}{1-0,6}=\dfrac{3,2}{0,4}=8$

Das führt zum rechten Hauptscheitel: $S_1(8\,|\,0)$.

r wird miniimal, wenn der Nenner maximal wird, also wenn $\cos(\varphi)$ minimal wird,

also für $\cos(\varphi)=-1 \Leftrightarrow \varphi=180^{O}$: $r_{max}=r(180^{O})=\dfrac{3,2}{1+0,6}=\dfrac{3,2}{1,6}=2$

Das führt zum linken Hauptscheitel: $S_2(-2\,|\,0)$.

Daraus kann man die große Halbachse berechnen: $2a=x_{S1}-x_{S2}=10 \Leftrightarrow a=5$.

Der Mittelpunkt hat also die x-Koordinate: $x_M=8-5=3$: $M(3\,|\,0)$.

Also gilt $\dfrac{(x-3)^2}{25}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow b^2(x-3)^2+25y^2=25b^2$

Andererseits ist $x(\varphi)=r\cdot\cos(\varphi)=\dfrac{3,2\cdot\cos(\varphi)}{1-0,6\cdot\cos(\varphi)}$ und $y(\varphi)=\dfrac{3,2\cdot\sin(\varphi)}{1-0,6\cdot\cos(\varphi)}$

Die Nebenscheitel liegen bei $x_M=3$. Daraus folgt φ:

$$\dfrac{3,2\cdot\cos(\varphi)}{1-0,6\cdot\cos(\varphi)}=3$$

$$3,2\cdot\cos(\varphi)=3(1-0,6\cdot\cos(\varphi))$$

Das ergibt $5\cdot\cos(\varphi)=3$

$$\cos(\varphi)=0,6$$

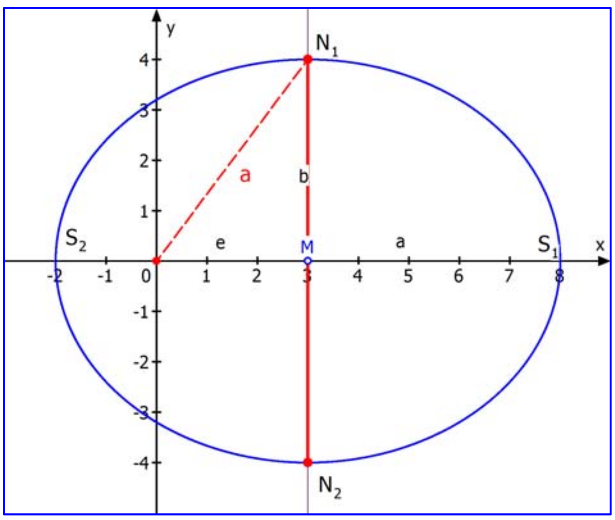
Also $\sin(\varphi)=\pm\sqrt{1-\cos^2(\varphi)}=\pm\sqrt{1-0,36}=\pm\sqrt{0,64}=\pm0,8$

Damit folgt: $y(\varphi)=\pm\dfrac{3,2\cdot0,8}{1-0,6\cdot0,6}=\pm\dfrac{3,2\cdot0,8}{0,64}=\pm4$

Die Nebenscheitel sind also: $N_1(3\,|\,4)$, $N_2(3\,|\,-4)$

Und somit kennen wir nun b = 4.

Ergebnis: $\dfrac{(x-3)^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$



3.5 Untersuchung der Polarkoordinatengleichung (4b) $r = \frac{p}{1+\varepsilon\cdot\cos(\varphi)}$

Behauptung:

Die Ellipse ist so in x-Richtung verschoben, dass ihr rechter Brennpunkt in den Ursprung fällt.

Beweis:

Ich ersetze p und ε: $r(\varphi) = \frac{\frac{b^2}{a}}{1+\frac{e}{a}\cdot\cos(\varphi)} = \frac{b^2}{a+e\cdot\cos(\varphi)}$ (*)

Man erhält den <u>maximalen Radius</u>, wenn der Nenner minimal wird, was für $\cos(\varphi) = -1$,

also für $\varphi = 180^{\circ}$ eintritt: Aus (*) folgt dann $r_{min} = r(180^{\circ}) = \frac{b^2}{a-e}$.

das ist bei $x = r\cdot\cos(180^{\circ}) = -\frac{b^2}{a-e}$ und $y = r\cdot\sin(180^{\circ}) = 0$

also für $A\left(-\frac{b^2}{a-e} \mid 0\right)$ linker Hauptscheitel,

Der <u>minimale Radius</u> erscheint bei maximalem Nenner, also für $\cos(\varphi) = +1$, also $\varphi = 0^{\circ}$.

$r_{max} = r(0^{\circ}) = \frac{b^2}{a+e}$ also für $x = r\cdot\cos(0^{\circ}) = \frac{b^2}{a+e}$ und $y = r\cdot\sin(0^{\circ}) = 0$

also für $B\left(\frac{b^2}{a+e} \mid 0\right)$ rechter Hauptscheitel.

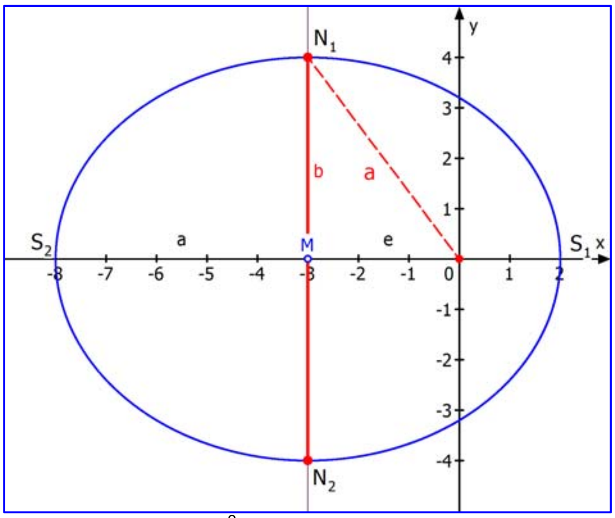
Der Ellipsenmittelpunkt ist der Mittelpunkt von A und B:

$$x_M = \frac{1}{2}\cdot(x_B + x_A) = \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{a+e} - \frac{b^2}{a-e}\right) = \frac{b^2}{2}\left(\frac{1}{a+e} - \frac{1}{a-e}\right) = \frac{b^2}{2}\cdot\frac{(a-e)-(a+e)}{(a+e)(a-e)} = \frac{b^2}{2}\frac{-2e}{a^2-e^2}$$

Wegen $a^2 - e^2 = b^2$ kann man vereinfachen: $x_M = \frac{b^2}{2}\cdot\frac{-2e}{b^2} = -e$

Mittelpunkt: $M(-e \mid 0)$.

Gleichung: $\frac{(x+e)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



Die Abbildung zeigt die Ellipse $\frac{(x+3)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

bzw. $r = \frac{3{,}2}{1+0{,}6\cdot\cos(\varphi)}$

denn aus a = 5 und b = 4 folgen $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25-16} = 3$, $p = \frac{b^2}{a} = \frac{16}{5} = 3{,}2$ und $\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

3.6 Herleitung der Scheitelgleichung (3) $y^2 = 2px - (1-\varepsilon^2)x^2$

Ausgehend von der Koordinatengleichung lege ich den linken Hauptscheitel der in x-Richtung geöffneten Ellipse in den Ursprung:

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad | \text{ Umstellen nach } y^2:$$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{(x-a)^2}{a^2} \qquad \text{d. h.} \qquad \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2 - 2ax + a^2}{a^2}$$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{2x}{a} - 1 \qquad \text{d. h.} \qquad \frac{y^2}{b^2} = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{2x}{a} \qquad | \cdot b^2$$

$$y^2 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot x^2 + \frac{2b^2}{a} x$$

Ersetzen: $p = \frac{b^2}{a}$ und $b^2 = a^2 - e^2$: $\qquad y^2 = -\frac{a^2 - e^2}{a^2} \cdot x^2 + 2p \cdot x$

$$y^2 = -\left(1 - \frac{e^2}{a^2}\right) \cdot x^2 + 2p \cdot x \qquad \text{d. h.} \qquad y^2 = 2p \cdot x - \left(1 - \frac{e^2}{a^2}\right) \cdot x^2$$

Ersetzen: $\varepsilon = \frac{e}{a}$: $\qquad y^2 = 2p \cdot x - \left(1 - \varepsilon^2\right) \cdot x^2$

Beispiel:

$\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ mit a = 5, b = 4, also $e = \sqrt{a^2 - b^2} = 3$, folgt $p = \frac{b^2}{a} = \frac{16}{5} = 3{,}2$, $\varepsilon = \frac{e}{a} = 0{,}6$.

Daher: $y^2 = 6{,}4 \cdot x - (1 - 0{,}36) \cdot x^2$

bzw. $y^2 = -0{,}64x^2 + 6{,}4x$

4 Ausführliche Ellipsenbeispiele

1. Beispiel

$x(\varphi) = 4 \cdot \cos(\varphi)$ und $y(\varphi) = 3 \cdot \sin(\varphi)$ für $\varphi \in [0\,;2\pi]$

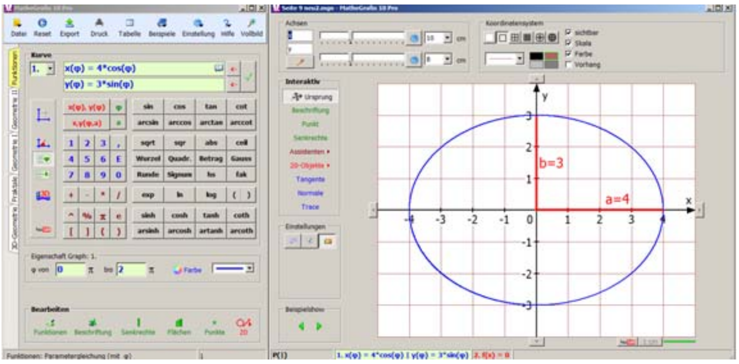
Aus $\frac{x}{4} = \cos(\varphi)$ und $\frac{y}{3} = \sin(\varphi)$ folgt durch Quadrieren und Addieren:

$$\frac{x^2}{16} = \cos^2(\varphi) \quad \text{und} \quad \frac{y^2}{9} = \sin^2(\varphi)$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Dies ist also die Ellipse um $M(0\,|\,0)$ mit a = 4 und b = 3.

Abb.: Darstellung dieser Ellipse mit MatheGrafix 10



Gleichung in Vektorform: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 4 \cdot \cos(t) \\ 3 \cdot \sin(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -4 \cdot \sin(t) \\ 3 \cdot \cos(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \ddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -4 \cdot \cos(t) \\ -3 \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$

1. Ableitung: $y'(x) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{3 \cdot \cos(t)}{-4 \cdot \sin(t)}$

2. Ableitung: $y''(x) = \frac{\ddot{y} \cdot \dot{x} - \ddot{x} \cdot \dot{y}}{\dot{x}^2} = \frac{-3 \cdot \sin(t) \cdot (-4) \cdot \sin(t) - (-4 \cdot \cos(t) \cdot 3 \cdot \cos(t))}{(-4 \cdot \sin(t))^2}$

$$y''(x) = \frac{12 \cdot \sin^2(t) + 12 \cdot \cos^2(t)}{16 \cdot \sin^2(t)} = \frac{12 \cdot \left[\sin^2(t) + \cos^2(t)\right]}{16 \cdot \sin^2(t)} = \frac{3}{4 \cdot \sin^2(t)}$$

Tangente und Krümmung an der Stelle $t = \frac{1}{4}\pi$

Kurvenpunkt: $\vec{x}\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \begin{pmatrix} 4 \cdot \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) \\ 3 \cdot \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 3 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 1{,}5\sqrt{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2{,}82 \\ 2{,}12 \end{pmatrix}$ $A(2{,}82\,|\,2{,}12)$

Tangentensteigung: $y'(2{,}82) = \frac{-3}{4 \cdot \tan\left(\frac{1}{4}\pi\right)} = \frac{-3}{4 \cdot 1} = -0{,}75$

Tangentengleichung: $y - \frac{3}{2}\sqrt{2} = -\frac{3}{4}\left(x - 2\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow \boxed{y = -\frac{3}{4}x + 3\sqrt{2}}$

Krümmungswert: $y''(2{,}82) = \frac{3}{4 \cdot \sin^2\left(\frac{1}{4}\pi\right)} > 0$

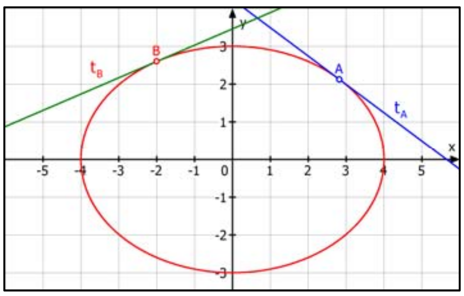
d. h. Linksskrümmung (gegen den Uhrzeigersinn gesehen!)

Tangente und Krümmung an der Stelle $x = -2$:

Zuerst wird t ermittelt: $4 \cdot \cos(t) = -2 \Leftrightarrow \cos(t) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow t \in \left\{\frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi, \ldots\right\}$

Kurvenpunkt: $\vec{x}\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \begin{pmatrix} 4 \cdot \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) \\ 3 \cdot \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ 3 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1{,}5\sqrt{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -2 \\ 2{,}60 \end{pmatrix}$ $B(-2\,|\,2{,}6)$

Tangentensteigung: $y'(-2) = \frac{-3}{4 \cdot \tan\left(\frac{2}{3}\pi\right)} = \frac{1}{4}\sqrt{3}$



Tangentengleichung: $y - \frac{3}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{4}\sqrt{3}(x + 2)$

$\boxed{y = \frac{1}{4}\sqrt{3} \cdot x + 2\sqrt{3}}$

Krümmungswert: $y''(-2) > 0$ d. h.

Linksskrümmung (gegen den Uhrzeigersinn gesehen!)

Bogenlänge der Ellipse : $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

Parameterdarstellung: $x(t)=4\cdot\cos(t)$ und $y(t)=3\cdot\sin(t)$ für $t\in[0;2\pi]$

Formel für die Bogenlänge: $s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$

Vektordarstellung: $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}4\cdot\cos(t)\\3\cdot\sin(t)\end{pmatrix}$, Ableitung: $\dot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix}-4\cdot\sin(t)\\3\cdot\cos(t)\end{pmatrix}$

Zwei Kurvenpunkte: $t=0$: $\vec{x}(0)=\begin{pmatrix}4\cdot\cos(0)\\3\cdot\sin(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow A(4\,|\,0)$

$t=\frac{1}{2}\pi$: $\vec{x}\left(\frac{1}{2}\pi\right)=\begin{pmatrix}4\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right)\\3\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}\Leftrightarrow B(0\,|\,3)$

Länge des Bogens AB:

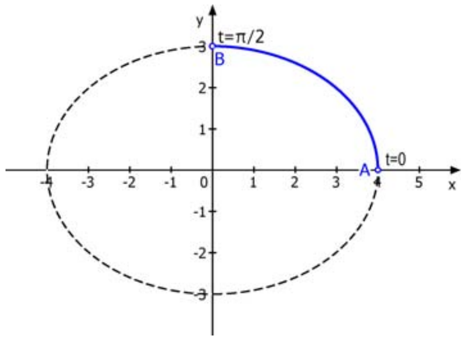
$$s=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=\int_0^{\pi/2}\sqrt{16\cdot\sin^2(t)+9\cdot\cos^2(t)}\,dt=\int_0^{\pi/2}\sqrt{16\cdot\sin^2(t)+9\cdot\left(1-\sin^2(t)\right)}\,dt=$$

$$s=\int_0^{\pi/2}\sqrt{7\cdot\sin^2(t)+9}\,dt\approx 4{,}713\ \ (\text{LE})$$

CAS-Rechnung:

$$\int_0^{\pi/2}\sqrt{7*\sin(x)^2+9}\,dx$$

4.712848006

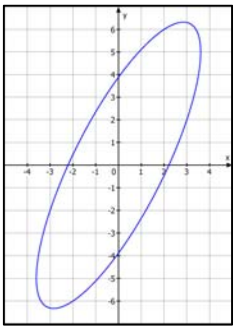


2. Beispiel

$x(t) = 3\cdot\cos(t) + 2\cdot\sin(t)$ und $y(t) = 2\cdot\cos(t) + 6\cdot\sin(t)$ für $t \in [0\,;2\pi]$

Dies ergibt eine ***schräg liegende Ellipse.***

Sie hat auch diese Gleichung: $40x^2 - 36xy + 13y^2 = 196$. (1)



Gleichung in Vektorform: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3\cdot\cos(t) + 2\cdot\sin(t) \\ 2\cdot\cos(t) + 6\cdot\sin(t) \end{pmatrix}$

Ableitungen: $\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -3\cdot\sin(t) + 2\cdot\cos(t) \\ -2\cdot\sin(t) + 6\cdot\cos(t) \end{pmatrix}$

$\ddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -3\cdot\cos(t) - 2\cdot\sin(t) \\ -2\cdot\cos(t) - 6\cdot\sin(t) \end{pmatrix}$

Tangentensteigungen: $y'(x) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{-2\cdot\sin(t)+6\cdot\cos(t)}{-3\cdot\sin(t)+2\cdot\cos(t)} = \frac{-2\tan(t)+6}{-3\tan(t)+2} = \frac{-2\cdot(\tan(t)-3)}{-2\left(\frac{3}{2}\tan(t)-1\right)} = \frac{\tan(t)-3}{\frac{3}{2}\tan(t)-1}$

Für t = 0: Kurvenpunkt: $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 3\cdot\cos(0) + 2\cdot\sin(0) \\ 2\cdot\cos(0) + 6\cdot\sin(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A(3\,|\,2)$

Tangentensteigung in A: $y'(0) = \frac{\tan(0)-3}{1{,}5\cdot\tan(0)-1} = \frac{-3}{-1} = 3$

Tangente in A: $y - 2 = 3\cdot(x-3) \Rightarrow \boxed{y = 3x - 7}$

Für $t = \frac{1}{3}\pi$ $\vec{x}\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \begin{pmatrix} 3\cdot\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) + 2\cdot\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) \\ 2\cdot\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) + 6\cdot\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 2\cdot\frac{1}{2} + 6\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5+\sqrt{3} \\ 1+3\sqrt{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3{,}23 \\ 6{,}20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow B(3{,}23\,|\,6{,}2)$

Tangentensteigung: $y'\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{\tan\left(\frac{1}{3}\pi\right)-3}{1{,}5\cdot\tan\left(\frac{1}{3}\pi\right)-1} = \frac{\sqrt{3}-3}{1{,}5\cdot\sqrt{3}-1} \approx -0{,}79$

Tangente in B: $y - \left(1+3\sqrt{3}\right) = -0{,}79\left(x - \left(1{,}5+\sqrt{3}\right)\right) \Leftrightarrow \boxed{y = -0{,}79x + 8{,}75}$

Wo hat die Ellipse eine senkrechte Tangente?

Das bedeutet Polstelle der 1. Ableitung, also $\tan(t) = 1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}\pi$ u. a.

Kurvenpunkt: $\vec{x}\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \begin{pmatrix} 3\cdot\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) + 2\cdot\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) \\ 2\cdot\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) + 6\cdot\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2} + 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2} + 6\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3{,}54 \\ 5{,}66 \end{pmatrix} \Leftrightarrow C(3{,}54\,|\,5{,}66)$

Weiterer Punkt: $t = \frac{1}{2}\pi$: $\vec{x}\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \begin{pmatrix} 3\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) + 2\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) \\ 2\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) + 6\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 0 + 2\cdot 1 \\ 2\cdot 0 + 6\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow D(2\,|\,6)$

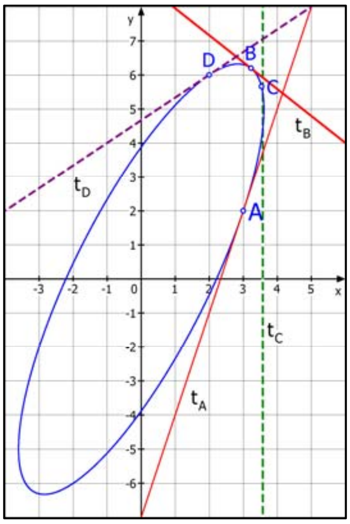
Tangentensteigung: $y'\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{\tan\left(\frac{1}{2}\pi\right)-3}{1{,}5\cdot\tan\left(\frac{1}{2}\pi\right)-1} = ?$

ist so nicht berechenbar, da für $t \to \frac{1}{2}\pi$ gilt: $\tan x \to \infty$.

Also $\lim\limits_{t\to\frac{1}{2}\pi} \frac{\tan(t)-3}{1{,}5\cdot\tan(t)-1} = \lim\limits_{t\to\frac{1}{2}\pi} \frac{1-\frac{3}{\tan(t)}}{1{,}5-\frac{1}{\tan(t)}} = \frac{1-0}{1{,}5-0} = \frac{2}{3} \approx 0{,}67$

Tangentengleichung in D:

$y - 6 = \frac{2}{3}\cdot(x-2) \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x + 4{,}67$



Ich weiß leider nicht, wie man von der Koordinatengleichung (1) auf die gegebene Parameterdarstellung kommt. Vielleicht kann es mir jemand verraten.
Aber ich kann zeigen, wie man aus der Koordinatengleichung 1 eine **Polarkoordinatenform** erhält:

Man ersetzt $x = r \cdot \cos(\varphi)$ und $y = r \cdot \sin(\varphi)$ und erhält:

$$40 \cdot r^2 \cos^2(\varphi) - 36 \cdot r^2 \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) + 13r^2 \cdot \sin^2(\varphi) = 196$$

r^2 ausklammern:

$$r^2 \cdot \left(40 \cdot \cos^2(\varphi) - 36 \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) + 13 \cdot \sin^2(\varphi)\right) = 196$$

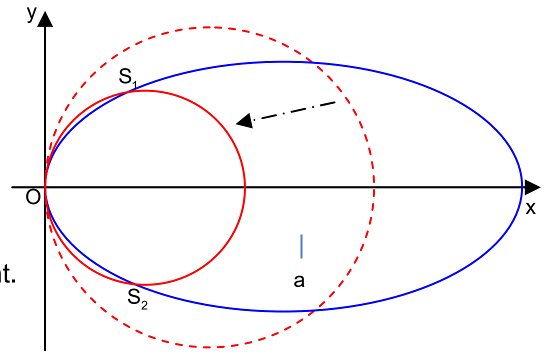
Umstellen: $$r^2 = \frac{196}{40 \cdot \cos^2(\varphi) - 36 \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) + 13 \cdot \sin^2(\varphi)}$$

Daraus folgt: $$r = \frac{14}{\sqrt{40 \cdot \cos^2(\varphi) - 36 \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) + 13 \cdot \sin^2(\varphi)}}$$

Damit kann man beispielsweise mit einem Grafikprogramm die schräge Ellipse zeichnen lassen, wenn es nicht möglich ist, die Koordinatengleichung dazu zu verwenden.

5 Krümmungskreise für Ellipsen

Als Krümmungskreis bezeichnet man **den Kreis mit dem größten Radius**, der die Ellipse am Hauptscheitel von innen und am Nebenscheitel von außen berührt.



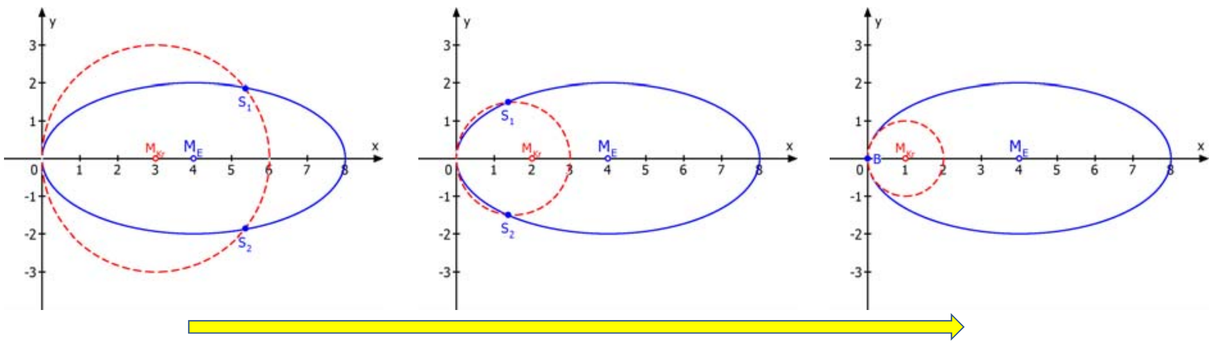
Zur Herleitung verwende ich Ellipsen in der Lage, in der sie den Mittelpunkt $M_E(a\,|\,0)$ hat und somit durch den Ursprung geht.

Sie hat dann diese Gleichung: $\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Dann setzen wir einen Kreis mit zunächst beliebigem Radius an, der ebenfalls im Ursprung die y-Achse berührt. Sein Mittelpunkt ist dann $M_K(r\,|\,0)$.

Er hat somit diese Gleichung: $(x-r)^2+y^2=r^2$

Die Abbildung zeigt zwei solche Kreise. Sie schneiden die Ellipse zusätzlich in zwei Punkten S_1, S_2.



Man verkleinert nun den Kreisradius (der Kreis soll die Ellipse aber immer noch in O berühren). Dann rücken die beiden Schnittpunkte enger zusammen. Schließlich erreicht man die Situation, in der die beiden Schnittpunkte mit dem Ursprung zusammenfallen. Sie bilden dann den Berührpunkt B. Diesen Vorgang kann man einfach durchrechnen:

Berechnung dieser Schnittpunkte.

1. Schritt: Kreisgleichung: $(x-r)^2+y^2=r^2 \quad\Rightarrow\quad x^2-2rx+r^2+y^2=r^2$

d. h. $x^2-2rx+y^2=0$

bzw. $y^2=-x^2+2rx$ (1)

Ellipsengleichung: $\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad | \cdot a^2b^2$

$$b^2(x-a)^2+a^2y^2=a^2b^2$$
$$b^2(x^2-2ax+a^2)+a^2y^2=a^2b^2$$
$$b^2x^2-2ab^2x+a^2b^2+a^2y^2=a^2b^2$$
$$b^2x^2-2ab^2x+a^2y^2=0 \qquad (2)$$

2. Schritt: Einsetzen von (1) in (2) und umformen:

$$b^2x^2 - 2ab^2x + a^2\left(-x^2 + 2rx\right) = 0$$

$$b^2x^2 - 2ab^2x - a^2x^2 + 2ra^2x = 0$$

Zusammenfassen, d.h. x^2 bzw. x ausklammern:

$$x^2\left(b^2 - a^2\right) + x\left(2ra^2 - 2ab^2\right) = 0$$

3. Schritt: x ausklammern: $x \cdot \left[x\left(b^2 - a^2\right) + \left(2ra^2 - 2ab^2\right)\right] = 0$

Der 1. Faktor x liefert die bekannte *Berührstelle* $x = 0$.

Der 2. Faktor, also die eckige Klammer, liefert die x-Koordinaten der Schnittpunkte:

$$x\left(b^2 - a^2\right) + \left(2ra^2 - 2ab^2\right) = 0$$

$$x\left(b^2 - a^2\right) = -2a\left(ra - b^2\right)$$

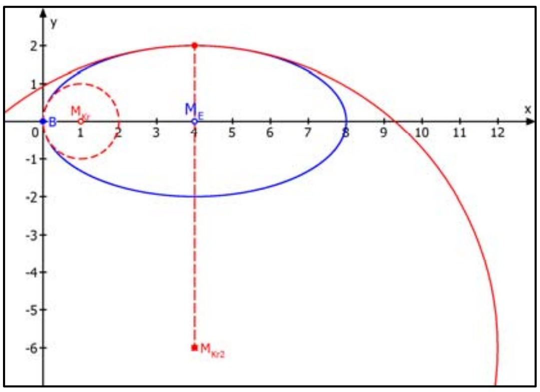
$$x = \frac{-2a\left(ra - b^2\right)}{b^2 - a^2} = \frac{-2a\left(ra - b^2\right)}{-\left(a^2 - b^2\right)} = \frac{2a\left(ra - b^2\right)}{a^2 - b^2}$$

4. Schritt: Wir verkleinern den Kreis, damit rücken die beiden Schnittpunkte näher zusammen. Damit sie auch noch in den Ursprung fallen, damit es also nur eine Lösung gibt, muss die Zählerklammer 0 werden. Das geht nur mit $ra - b^2 = 0$.

Es muss also gelten: $\boxed{r_1 = \frac{b^2}{a}}$.

Dies ist der Radius für den Krümmungskreis im Ursprung, also am Hauptscheitel.

Bei unserer Ellipse war $a = 4,\ b = 2 \Rightarrow r_1 = \frac{4}{4} = 1$.



Hinweis:

Der Radius für die Krümmungskreise an den beiden Nebenscheiteln ist $r_2 = \frac{a^2}{b}$.

Dort berührt der Krümmungskreis von außen!

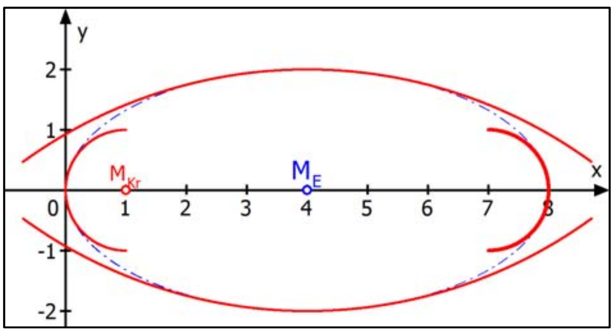
Für unsere Ellipse ergibt das $r_2 = \frac{16}{2} = 8$.

Im Text 23111 steht, wie man diese Radien bzw. die Mittelpunkte der Krümmungskreise konstruieren kann.

Beeindruckend ist die folgende Abbildung. Sie zeigt, wie gut die vier Krümmungskreise in den Ellipsenscheiteln die Form der Ellipse andeuten.

Die Ellipse ist fein gestrichelt eingezeichnet.

Wenn man noch 4 Punkte in den Übergangsbereichen konstruiert, dann kann man die Ellipse gut einzeichnen.



Berechnung der Krümmungskreisradien durch eine Formel

Im Text 54011 (Differentialgeometrie) wurde eine Formel für die Krümmung entwickelt:

$$\kappa(t)=\frac{\ddot{y}\cdot\dot{x}-\ddot{x}\cdot\dot{y}}{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{3/2}}$$

Eine Parametergleichung für eine Ellipse um den Ursprung mit den Halbachsen a und b ist z. B.:

$$\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}a\cdot\cos(t)\\ b\cdot\sin(t)\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\dot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix}-a\cdot\sin(t)\\ b\cdot\cos(t)\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\ddot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix}-a\cdot\cos(t)\\ -b\cdot\sin(t)\end{pmatrix}$$

Einsetzen in die Krümmungsformel:

$$\kappa(t)=\frac{\ddot{y}\cdot\dot{x}-\ddot{x}\cdot\dot{y}}{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{3/2}}=\frac{ab\cdot\sin^2(t)+ab\cdot\cos^2(t)}{\left(a^2\cdot\sin^2(t)+b^2\cdot\cos^2(t)\right)^{3/2}}=\frac{ab}{\left(a^2\cdot\sin^2(t)+b^2\cdot\cos^2(t)\right)^{3/2}}$$

Für den rechten Hauptscheitel gilt t = 0:

$$\kappa(0)=\frac{ab}{\left(a^2\cdot\sin^2(0)+b^2\cdot\cos^2(0)\right)^{3/2}}=\frac{ab}{\left(b^2\right)^{3/2}}=\frac{ab}{b^3}=\frac{a}{b^2}$$

Krümmungskreisradius: $r_1=\frac{1}{\kappa(0)}=\frac{b^2}{a}$

Für den oberen Nebenscheitel gilt $t=\frac{1}{2}\pi$

$$\kappa\left(\tfrac{1}{2}\pi\right)=\frac{ab}{\left(a^2\cdot\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi\right)+b^2\cdot\cos^2\left(\frac{1}{2}\pi\right)\right)^{3/2}}=\frac{ab}{\left(a^2\right)^{3/2}}=\frac{ab}{a^3}=\frac{b}{a^2}\quad\text{und}\quad r_2=\frac{a^2}{b}.$$

6 Ellipsen in verschobener Lage

Verschiebt man die Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ um c in x-Richtung und um d in y-Richtung, dann bekommt der Mittelpunkt die Koordinaten $M(c\,|\,d)$ und die Gleichung der Ellipse lautet dann

$$\frac{(x-c)^2}{a^2}+\frac{(y-d)^2}{b^2}=1$$

Beispiel: $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$ hat den Mittelpunkt $M(2\,|\,-1)$, a = 3 und b = 2,

Also hat sie die Scheitel $S_1(2+3\,|\,-1)=(5\,|\,-1)$, $S_2(2-3\,|\,-1)=(-1\,|\,-1)$

und wegen $e=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5}$ die Brennpunkte $F_{1,2}\left(2\pm\sqrt{5}\,|\,-1\right)$.

Man kann zu solchen Ellipsen auch rasch eine Parametergleichung aufstellen.

Ist der Ellipsenmittelpunkt der Ursprung, verwendet man:

$$\vec{x}(t)=\begin{pmatrix} a\cdot\cos(\varphi) \\ b\cdot\sin(\varphi)\end{pmatrix},\quad \varphi\in[0\,;2\pi[$$

Liegt er in $M(x_M\,|\,y_M)$:

$$\vec{x}(t)=\begin{pmatrix} x_M+a\cdot\cos(\varphi) \\ y_M+b\cdot\sin(\varphi)\end{pmatrix},\quad \varphi\in[0\,;2\pi[$$

Bei unserem Beispiel:

$$\vec{x}(t)=\begin{pmatrix} 2+3\cdot\cos(\varphi) \\ -1+2\cdot\sin(\varphi)\end{pmatrix},\quad \varphi\in[0\,;2\pi[$$